Legge dello sdoppiamento
e derivata di una funzione

Emilio Polverino

docente di Matematica e Fisica – Liceo Scientifico “G. Da Procida” - Salerno

Il problema delle rette tangenti è già affrontato nello studio delle coniche in due modi diversi: a) sistema tra conica e retta e condizione di tangenza; b) legge dello sdoppiamento. Due metodi che i ragazzi riescono ad applicare in modo rapido. Il più semplice, ovviamente è la legge dello sdoppiamento.

E per le altre curve? Il problema si risolve, come è noto, col calcolo infinitesimale, introducendo il concetto di “derivata di una funzione”. Nei licei scientifici l’argomento viene svolto al quinto anno, costringendo docenti ed alunni ad un massacrante lavoro, per completare la preparazione per gli esami di stato. E’ possibile anticiparlo nella terza classe di un corso ordinario di liceo scientifico in modo elementare, o occorre veramente l’analisi infinitesimale?

Noi ci abbiamo provato, partendo proprio dalle considerazioni sulle coniche e ricorrendo alla legge dello sdoppiamento. La lezione è stata svolta nella classe 3^ di un corso ordinario.

Dalla legge dello sdoppiamento alla derivata di una funzione

1) Consideriamo la parabola $y = x^2$ e il punto $A(x_a, y_a)$ ad essa appartenente.

La legge dello sdoppiamento per determinare l’equazione della retta tangente alla parabola nel punto A ci porta alle sostituzioni:

$$x = \frac{x + x_a}{2} \qquad y = \frac{y + y_a}{2} \qquad x^2 = x_a x \qquad y^2 = y_a y$$

Quindi: $\frac{y + y_a}{2} = x_a x$

E svolgendo: $y = 2x_a x - y_a$

Come si vede, il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola nel punto A è: $m = 2x_a$

Poiché la relazione vale qualunque sia il punto A appartenente alla curva e, quindi, qualunque sia x_a dell’insieme di definizione, allora:

$$m = 2x$$

che è una retta di coefficiente angolare 2.

2) Consideriamo la parabola completa $y = ax^2 + bx + c$ e il punto $A(x_a, y_a)$

Con opportuni calcoli, applicando la legge dello sdoppiamento, otteniamo: $m = 2ax_a + b$

E poiché vale per ogni punto dell'insieme di definizione, allora

$$m = 2ax + b$$

Che è sempre una retta di coefficiente angolare 2a

3) Passiamo alla funzione: $y = \sqrt{16 - x^2}$

Essa è deducibile dall'equazione della circonferenza $x^2 + y^2 = 16$

Applichiamo la legge dello sdoppiamento

$$x_a x + y_a y = 16$$

Risolvendo avremo: $y = -\dfrac{x_a}{y_a}x + \dfrac{16}{y_a}$

Da cui $m = -\dfrac{x_a}{y_a}$

Poiché vale qualunque sia il punto A, allora:

$$m = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

Considerazioni

Dalla funzione parabola abbiamo ottenuto una funzione di 1° grado. Dalla curva deducibile da circonferenza abbiamo ottenuto un'altra funzione, però poco identificabile

Una cosa è certa, l'andamento del coefficiente angolare della retta tangente ad una curva è un'altra funzione che deriva da quella data e possiamo chiamarla FUNZIONE DERIVATA.

E per altre funzioni? Non potendo applicare la legge dello sdoppiamento, sarà necessario seguire una strada diversa. Presenteremo allora il problema sotto un altro aspetto, ricorrendo a Derive.

Pendenza o derivata, usiamo Derive

Emilio Polverino

docente di Matematica e Fisica – Liceo Scientifico "G. Da Procida" – Salerno

1) Derivata e significato geometrico

Come è ben noto, con la legge dello sdoppiamento è facile determinare l'equazione della retta tangente alla curva e quindi il coefficiente angolare della stessa retta e quindi matematicamente la derivata di una curva deducibile da una conica[1]. Ma per altre funzioni?

Non potendo applicare la legge dello sdoppiamento, dobbiamo ricorrere ad altri metodi. Presenteremo qui il problema sotto un altro aspetto, ricordando che *l'inclinazione della retta tangente ad una curva, in uno qualsiasi dei suoi punti, rappresenta la pendenza della curva in quel punto*. E useremo a tal fine Derive.

Lavoreremo dapprima sulla <u>retta</u>, poi passeremo alle coniche, infine a funzioni del tutto generali.

Consideriamo, allora, la retta y = x e facciamo dedurre la pendenza della retta in ogni punto. Risultato, ovvio, m=1 = costante. Il grafico di **m** è una retta parallela all'asse delle **x**.

Poi passiamo alla retta y = 2x. Risultato m=2, una retta sempre parallela all'asse delle x.

In generale, se <u>y = kx</u>, si avrà <u>m = k = costante</u>, una retta parallela all'asse delle x. Facile, no!

Considerazioni: Da una funzione di 1°grado si ottiene una funzione costante.

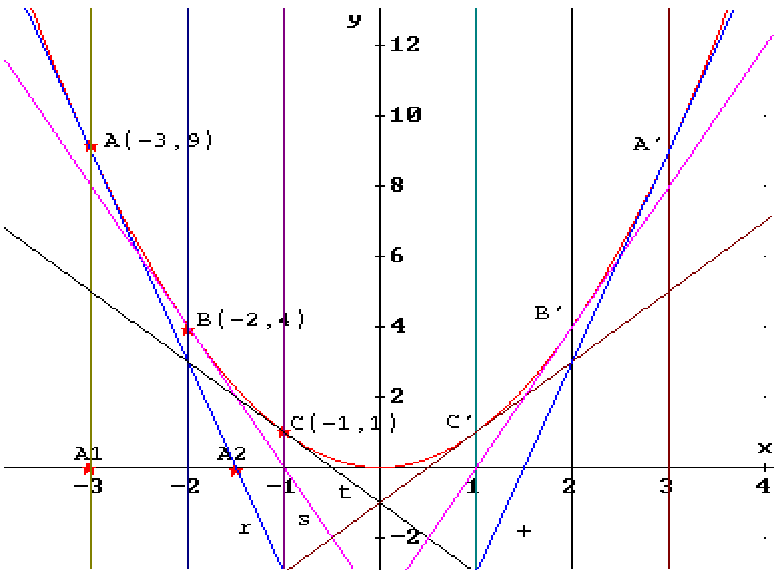
<u>E per la parabola?</u> Seguiamo il procedimento.

a) Rappresentiamo con Derive la parabola y = x^2;

b) Scegliamo alcuni punti e con la legge dello sdoppiamento ricaviamo le equazioni della rette tangenti in questi punti;

c) Usando Derive o ricorrendo al disegno tracciamo le retti tangenti in tali punti;

d) Stampiamo il tutto ed otteniamo la figura seguente:



e) Invitiamo i ragazzi a determinare l'inclinazione, la pendenza di ogni retta o meglio il coefficiente angolare di ogni retta tangente, usando la triangolazione.

Esempio: per la retta **r**, tangente alla parabola nel punto A(-3,9), il triangolo da considerare è AA_1A_2. Risultato: m= AA_1/A_1A_2 = 9/(-1,5) = -6.

E così di seguito per tutte le rette tangenti.

Infine, si fa rappresentare graficamente l'andamento della pendenza.

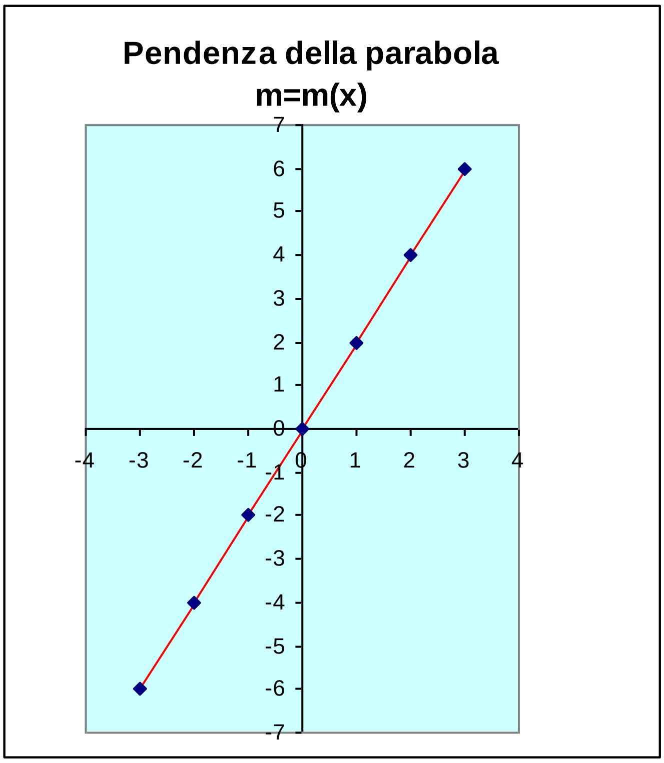
<u>Il risultato è la retta di equazione y = 2x.</u>

Così, dalla parabola $y = x^2$ si ottiene la retta di equazione y = 2x.

Da una funzione di 2° grado deriva una funzione di 1° grado. Non solo, ma l'esponente 2 della x nella equazione della parabola diventa coefficiente della x nell'equazione della retta. Proprio ciò che si ottiene applicando la legge dello sdoppiamento.

Tabella di m=m(x)

x	m
-3	-6
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6



Domanda: E se avessimo rappresentato $y = x^3$? Risposta certa: $y = 3x^2$

Guarda un po', si comprende subito il meccanismo nel caso di funzioni polinomiali.

<u>Considerazioni</u>: Da una funzione di 1° grado (retta) si ottiene una funzione costante; da una di 2° grado, una funzione di 1° grado; da una di 3° grado, una funzione di 2° grado. Dunque, la pendenza di una funzione è un'altra funzione che deriva dalla precedente e per questo la diciamo "funzione derivata".

<u>Conclusioni:</u> La derivata di una funzione, in seguito indicata con D, y', f'(x), in generale è una nuova funzione che rappresenta l'andamento della pendenza della curva in tutti i suoi punti.

In particolare, la derivata della funzione calcolata nel punto x_a rappresenta la pendenza o il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto A di ascissa x_a.

E per le altre funzioni? Come determinare l'andamento del coefficiente angolare?

Con Derive è facile. Basta infatti selezionare la funzione e poi cliccare sul simbolo δ . Si ottiene la funzione derivata che si può rappresentare graficamente. Vediamo come.

2) USIAMO DERIVE

a) Soluzione matematica

Nel paragrafo precedente, abbiamo visto che la derivata di una funzione calcolata nel punto x_o rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto di ascissa x_o.

Se $A(x_o,y_o)$ è il punto appartenente alla curva $y = f(x)$, allora l'equazione della retta tangente alla curva per A è:

$$y - y_o = m(x- x_o) \qquad \text{con } m = f'(x_o)$$

Esempio: Consideriamo la curva $\quad y = x^3$

La sua derivata è: $\quad y' = 3x^2$

Sia A il punto di ascissa 2; calcoliamo con Derive il valore della funzione e della sua derivata nel punto 2

$$y_o = y(2) = 8 \qquad m = y'(2) = 12$$

Allora l'equazione della retta tangente per A(2,8) è:

$$y - y_o = m(x- x_o)$$

$$y - 8 = 12(x - 2)$$

che risolta dà: $\quad y = 12x - 16$

b) Soluzione grafica

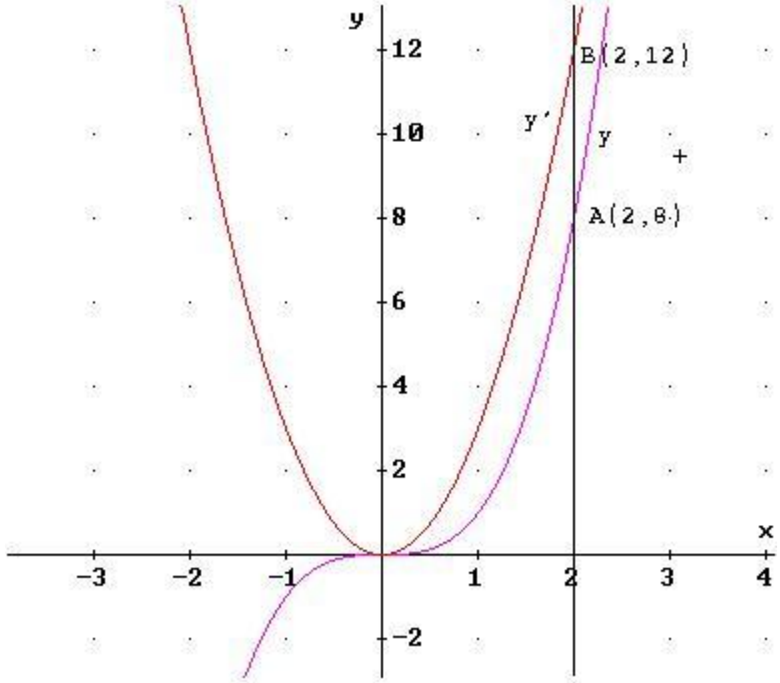
1) Sia $y = x^3$. Rappresentiamo graficamente la funzione (curva viola) e la sua derivata (curva rossa).

Poi tracciamo la retta $x = 2$ (dove 2 è l'ascissa di A). Tale retta interseca la funzione nel punto A di ordinata 8 e la sua derivata nel punto B di ordinata 12. Quest'ultimo valore rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto A.

Letti i valori di y_o e di m, scriviamo l'equazione della retta passante per A di ascissa 2 (vedi sopra).

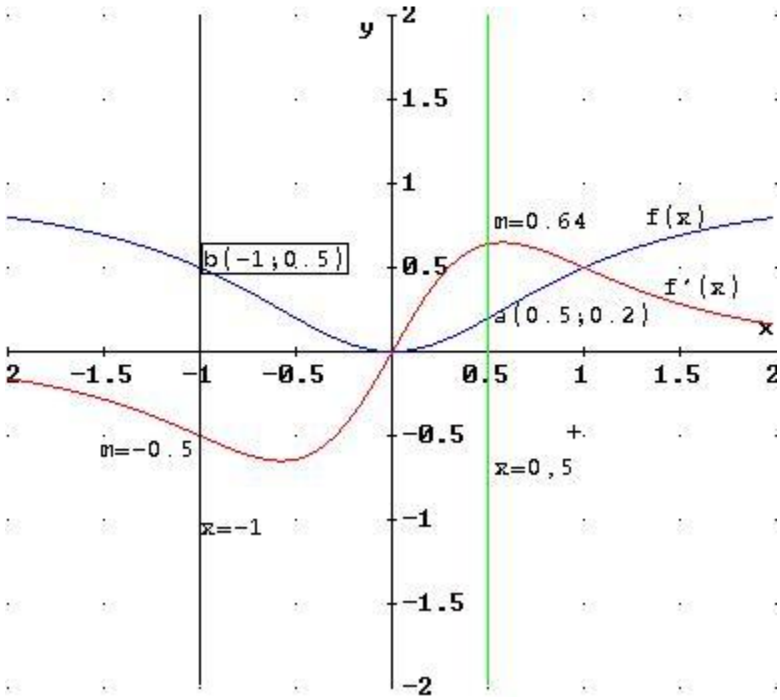
Ovviamente il discorso vale per qualsiasi punto x_o.

Se scegliamo $x_o = 1$ avremo dal grafico $y_o = 1$ e $m = 3$. E così per altri punti.



Il metodo, alquanto semplice, consente di risolvere situazioni più complicate, senza calcolare il valore della derivata nei vari punti. Utilizzando la rappresentazione grafica, ovviamente i risultati saranno approssimati a seconda della scala usata.

2) Consideriamo la funzione: y = $\frac{x^2}{x^2+1}$ (curva blu) e la sua derivata: y = $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ (curva rossa)



Dal grafico, per ogni valore di x è possibile determinare il valore della funzione e del coefficiente angolare della retta tangente nel punto considerato.

Nell'esempio di sopra:

per x = 0,5 si ha: y = 0,2 e m = 0,64

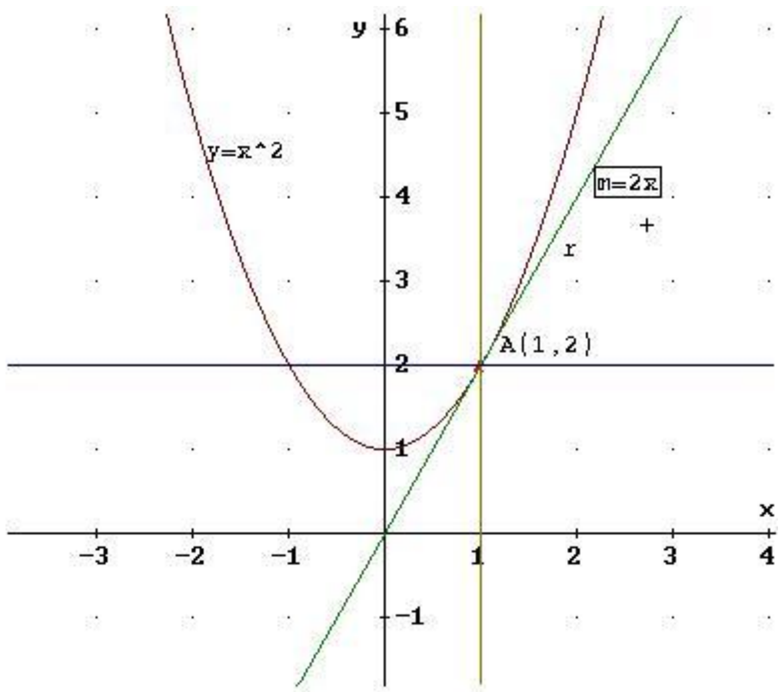
per x = -1,0 si ha: y = 0,5 e m = -0,5

E, quindi, è possibile determinare le equazioni delle rette tangenti in quei punti.

Esercizio di verifica: Determinare graficamente con Derive l'equazione della retta tangente alla curva y = sen(lnx) nel punto di ascissa 3.

3) CRESCENZA E DECRESCENZA DELLA FUNZIONE

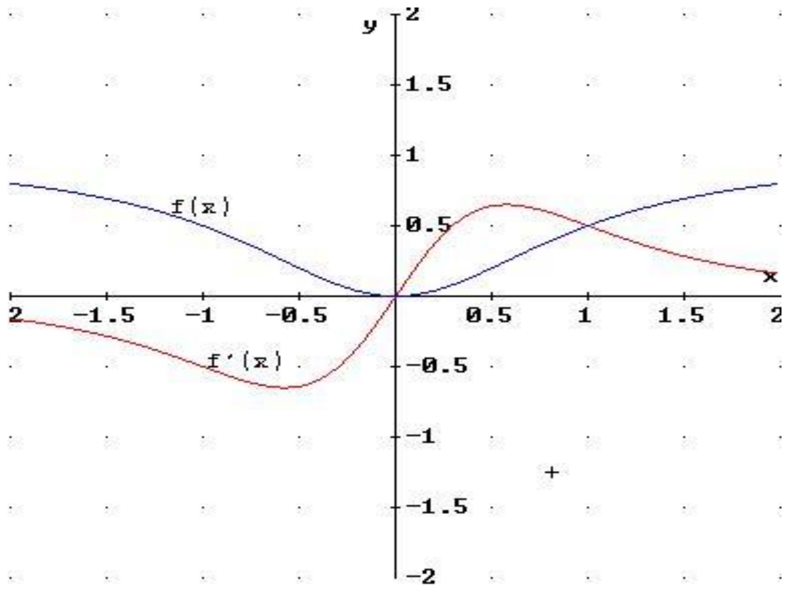
Nelle lezioni successive, in laboratorio, i ragazzi si sono esercitati nel calcolo di **m** in vari punti di una curva nonché nello studio più ampio di una funzione, quale determinazione della crescenza, decrescenza o punti di minimo o di massimo, come negli esempi che seguono.



Osservando la funzione (parabola) e la sua derivata (retta), si nota che se la funzione decresce la derivata è negativa, se cresce la derivata è positiva. La funzione, poi presenta un minimo (vertice) quando la derivata si annulla.

Altro esempio: Con Derive si fa rappresentare graficamente la funzione y = $\frac{x^2}{(x^2+1)}$

(curva blu) e la sua derivata (curva rossa), calcolata con Derive.



Anche qui, osservando la funzione e la sua derivata, si nota che la funzione decresce quando la derivata è negativa e cresce quando la derivata è positiva. La funzione, poi presenta un minimo quando la derivata si annulla (ma è crescente nel punto). Di più possiamo notare che la funzione presenta punti di flesso (inversione della concavità) quando la derivata presenta un massimo o un minimo.

Insomma, tante considerazioni da una semplice lettura del grafico della funzione e della derivata.

Mi fermo qui. Credo che quanto detto possa essere utile a colleghi e ragazzi per un buon approccio allo studio delle derivate. Ma è d'obbligo una considerazione: è giunto il momento di pensare seriamente ad una modifica delle programmazioni, introducendo il concetto di derivata sin dal terzo anno del liceo scientifico.

Salerno, 03 Giugno 2006