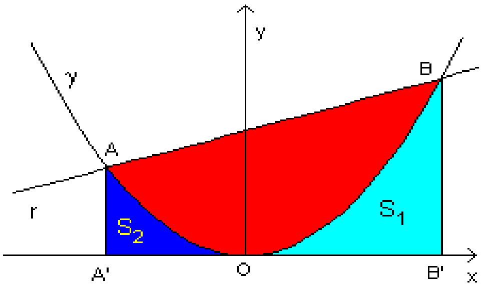
Area del segmento parabolico obliquo

Se il segmento parabolico è generato dall'intersezione della parabola γ di equazione $y=ax^2$ ($a>0$) con la retta r obliqua rispetto agli assi cartesiani, detti A e B i punti di intersezione e A' e B' le loro proiezioni sull'asse delle ascisse, l'area del segmento parabolico è ottenibile dalla differenza tra l'area del trapezio ABB'A' e la somma delle aree dei triangoli mistilinei S_1 e S_2.



Dette x_A e x_B ($x_A<0<x_B$) le ascisse di A e B, il segmento A'B' ha misura $\overline{A'B'} = (x_B - x_A)$, il segmento AA' ha misura $\overline{AA'} = a\,x_A^2$ e il segmento BB' ha misura $\overline{BB'} = a\,x_B^2$.

L'area del trapezio ABB'A' è dunque

$$\mathcal{A}(ABB'A') = \frac{1}{2}a\left(x_B^2 + x_A^2\right)\left(x_B - x_A\right)$$

L'area del triangolo mistilineo S_1 è un terzo di quella del rettangolo di lati OB' e BB' e l'area del triangolo mistilineo S_2 è un terzo di quella del rettangolo di lati OA' e AA', cioè

$$\mathcal{A}(S_1) = \frac{1}{3}x_B\left(a\,x_B^2\right)$$
$$\mathcal{A}(S_2) = -\frac{1}{3}x_A\left(a\,x_A^2\right)$$

L'area del segmento parabolico AOB risulta dunque

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(AOB) &= \frac{1}{2}a\left(x_B^2 + x_A^2\right)\left(x_B - x_A\right) - \frac{1}{3}a\,x_B^3 + \frac{1}{3}a\,x_A^3 = \\ &= a\,\frac{3\left(x_B^3 - x_Ax_B^2 + x_A^2x_B - x_A^3\right) - 2\,x_B^3 + 2\,x_A^3}{6} = \\ &= \frac{a}{6}\left(x_B^3 - 3x_Ax_B^2 + 3x_A^2x_B - x_A^3\right) = \\ &= \frac{a}{6}\left(x_B - x_A\right)^3\end{aligned}$$

Questa espressione dell'area del segmento parabolico vale in generale per ogni parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ con $a>0$. Infatti, traslando l'origine del sistema di riferimento nel vertice della parabola si riproduce la configurazione studiata.

Ovviamente, se a è negativo, va considerato in valore assoluto.

In definitiva, data una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ intersecata da una retta nei punti di ascisse rispettivamente x_A e x_B ($x_A<x_B$), il segmento parabolico così determinato ha area

$$\mathcal{A} = \frac{|a|}{6}\left(x_B - x_A\right)^3$$